Probabilités : résumé ou cours rapide

I. Un peu d'histoire :

On trouve des traces de différents jeux de hasard avec presque toutes les civilisations anciennes que l'on a pu étudier. Les soldats, simples mercenaires, passaient un peu de temps à guerroyer et, beaucoup de temps en inactivité. Ils ont donc rapidement adopté des jeux simples à transporter, faciles à mettre en œuvre.
Si l'on peut penser que la recherche d'une martingale (une méthode qui permette de gagner à tous les coups ou presque) a très certainement préoccupé bien des joueurs, la mathématisation des différentes possibilités de jeux, de l'espérance de gains, de la probabilité de gagner n'est somme toute que récente, du moins d'après les écrits connus.
Cosme II de Médicis (1590-1621) **Grand Duc de Toscane** joueur acharné s'étonnait que dans le jeux de « passe dix » qui se joue en lançant trois dés cubiques dont on somme les trois faces supérieures, la somme 10 sortait plus souvent que la somme 9 alors que leurs décompositions se faisaient en six sommes : 6+2+1 ; 5+3+1 ; 5+2+2 ; 4+4+1 ; 4+3+2 ; 3+3+3 pour la somme 9 et 6+3+1 ; 6+2+2 ; 5+4+1 ; 5+3+2 ; 4+4+2 et 4+3+3 pour la somme 10.
Il proposa ce problème à **Cardan** (1501-1576) qui ne su répondre. C'est **Galilée** (1564-1642) qui écrivit la solution vers 1620 : en réalité il faut aussi comptabiliser les sommes obtenues par permutations (6+2+1 ; 2+6+1…) ce qui fait apparaître 25 sommes 9 et 27 sommes 10, sur un total de 216. La différence est faible, le Grand Duc devait passer beaucoup de temps à jouer pour arriver à s'en apercevoir !
A la suite de cet épisode, Cardan écrit un ouvrage sur les précautions à prendre pour éviter la tricherie dans les jeux de hasard.
Antoine Gombauld, **Chevalier de Méré**, écrivain français (1607-1684), eut avec Pascal une longue correspondance sur les calculs de probabilités et le problème de la partie interrompue. Il proposa deux problèmes, qui sont considérés comme le point de départ de la théorie des probabilités.
Premier problème : combien de fois faut-il jeter deux dés pour avoir a priori au moins une chance sur deux d'obtenir un double six ? est-ce 24 ou 25 ? La solution est un exercice d'analyse combinatoire.
Deuxième problème : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en plusieurs parties, chacun misant au départ 32 pistoles. La règle du jeu dit que le premier des deux qui aura remporté trois parties emportera la totalité du pot, soit 64 pistoles ; celui-ci aura donc gagné 32 pistoles alors que l'autre en aura perdu 32.
Pour une raison inconnue les deux joueurs sont obligés de s'interrompre avant que l'un ou l'autre n'ait gagné trois manches ; par exemple le joueur A a gagné deux manches et le joueur B en a gagné une. Comment faut-il alors répartir le pot entre les deux joueurs ? Quel est le partage juste en cette circonstance ?
C'est pendant l'été 1654 que Pascal résout ces deux problèmes dans une correspondance avec **Fermat** (1601-1665). Bien que Pascal ait voulu publier ces résultats, il ne le fit pas. Il encouragea Huygens (1629-1695) à le faire dans le premier livre écrit sur la théorie des probabilités en 1657.

II. Avec du bon sens… des statistiques vers les probabilités :

Il semble raisonnable de penser qu'après avoir lancé 100 fois une pièce (non truquée) la fréquence d'apparition de pile (ou de face !) soit environ 50/100=1/2=0,5.
On peut dire que la probabilité d'obtenir pile (ou face) en lançant une pièce régulière (ce qui veut dire non truquée) est 1/2.

III. Des mots (vocabulaire) et des formules :

Lancer une pièce normale (donc non truquée !) permet d'obtenir deux résultats différents, pile ou face. Lancer un dé (toujours non truqué) donne 6 résultats différents : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ;5 ;6.
On nomme **événement élémentaire** ou **éventualité** chaque résultat qu'il est possible d'obtenir.
L'ensemble de tous les événements élémentaires constitue l'univers des probabilités, noté Ω (anciennement) ou U (actuellement).
Pour notre pièce Ω ={Pile, Face} et pour le dé U={1 ; 2 ; 3 ; 4 ;5 ;6}.
Dans le cas de l'**équiprobabilité** (chaque événement élémentaire à la même probabilité), la probabilité d'un événement A se calcule par $p(A)=\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ que l'on écrit (au brouillon seulement, interdit en contrôle ou BAC !) $p(A)=\dfrac{NKF}{NKP}$.

Exemples :

- ✓ Je lance un dé cubique (normal). Probabilité d'obtenir un nombre pair ?
  p(pair)=p(« 2 ou 4 ou 6 »)= $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$.
- ✓ Je tire une carte d'un jeu de belotte (32 cartes). Probabilité que ce soit un valet ?

p(valet)= $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

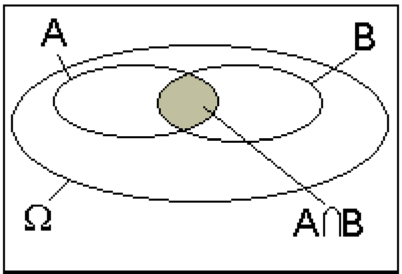
Deux **propriétés** des probabilités (importantes à ne pas oublier lors de tout calcul !) :

1. $0 \le p \le 1$ (une probabilité est un nombre POSITIF compris entre 0 et 1).
2. la somme des probabilités de tous les événements élémentaires vaut 1.

Deux petites **propriétés** des probabilités (qui semblent normales) :

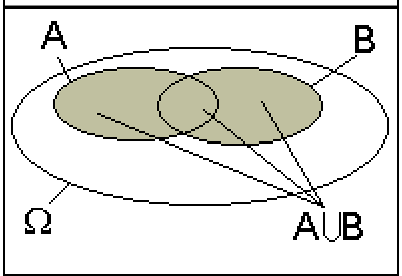
3. p(Ω)=1.
4. l'ensemble vide est noté ∅ ou {}. Alors p(∅)=0.

Une vue d'ensembles :



$A \cap B$ =« les éléments à la fois dans A **et** dans B ». Ce qui se lit A inter B.

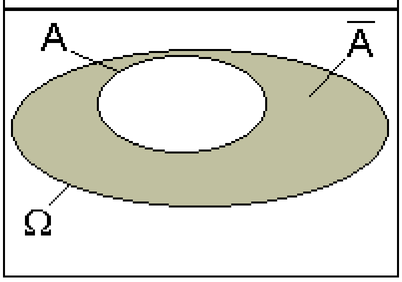
p($A \cap B$) se calcule directement.



$A \cup B$ =« les éléments de A **ou** de B ». Ce qui se lit A union B.

⚠ le « ou » n'est pas exclusif (« les deux » fait aussi partie).

$\boxed{\mathbf{p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)}}$.



On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans Ω (tout ce qui est dans Ω et qui n'est pas dans A).

$\boxed{p(\overline{A})=1-p(A)}$

IV. LES calculs : 4 types différents

LE problème est de reconnaître le type de calcul à employer (il faut de l'expérience, donc avoir fait de nombreux exercices !…). Au bac ils sont souvent suffisamment sympas pour proposer la méthode à employer !

1. Calcul direct :

- ✓ Une urne contient 4 boules vertes numérotées 1 ; 2 ; 3 et 5, ainsi que 6 rouges numérotées 1 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 et 8 puis 2 jaunes numérotées 1 et 4. On prend « au hasard » (ce qui laisse entendre qu'elles sont indiscernables quand on prend une et que l'on est dans le cas de l'équiprobabilité) une boule.
  Probabilité des événements : A=« elle est jaune », B= « elle est rouge », C= « elle n'est pas rouge », D= « elle est bleue », E= « elle porte un numéro impair ».

On récite… équiprobabilité donc p(A)= $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{2}{6+4+2} = \dfrac{1}{6}$.

p(B)= $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.

p(C) se calcule directement p(C)=$\frac{4+2}{12}=\frac{1}{2}$ ou en utilisant les propriétés des ensembles… si elle n'est pas rouge c'est donc l'événement contraire d'être rouge. Alors p(C)=1-p(« rouge »)=1-p(B)=$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

D= « elle est bleue » est un événement impossible donc p(D)=p(∅)=0.

Enfin, p(E)=$\frac{6}{12}$.

- ✓ Calcul direct dans un cas de non équiprobabilité : un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du numéro 6 soit le triple de la probabilité de sortie du numéro 1. Les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 ont tous la même probabilité de sortie.
Calculer la probabilité de sortie de chaque face.

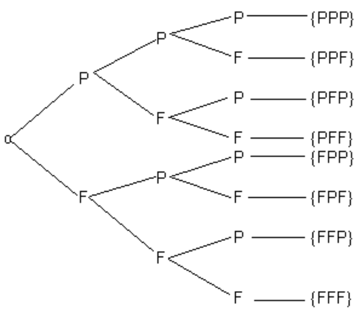
Il faut s'aider des propriétés… « la somme des probabilités de tous les événements élémentaires vaut 1 » (donc $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$) et de l'énoncé : $p_6=3p_1$ et $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5$. Poser $p=p_1$ (la plus petite des probas dont on parle).
Alors : p+p+p+p+p+3p=1 d'où 8p=1 et p=1/8.
Réponse à la questions : $p_1=1/8$, $p_2=1/8$, $p_3=1/8$, $p_4=1/8$, $p_5=1/8$, $p_6=3/8$.

- ✓ Cas de non équiprobabilité (suite) : un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie de chaque face soit proportionnelle à son numéro.
Calculer la probabilité de sortie de chaque face.

Comme précédemment, $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ (propriété de probas) et poser $p=p_1$. Alors $p_1=p$, $p_2=2p$, $p_3=3p$, $p_4=4p$, $p_5=5p$, $p_6=6p$. D'où p+2p+3p+4p+5p+6p=1 soit 21p=1 et p=1/21.
Réponse à la questions : $p_1=1/21$, $p_2=2/21$, $p_3=3/21$, $p_4=4/21$, $p_5=5/21$, $p_6=6/21$.

2. Arbre :

- ✓ En lançant trois fois une pièce bien équilibrée, probabilité d'obtenir exactement une fois 'face' puis probabilité d'obtenir au moins une fois 'face'



Une fois construit le « petit » arbre ci-contre, aucun problème pour répondre aux questions.
p(« une fois face exactement »)=3/8. C'est ce que JE compte car JE trouve {PPF}, {PFP} et {FPP} c'est tout.

p(« au moins une fois face ») : peut se faire directement (compter)…
p(« au moins une fois face »)=7/8,
ou par ruse et astuce… « au moins une fois face » c'est le contraire de « pas de face ». D'où p(« au moins une fois face »)=1-p(« pas de face »)
=1-p(« tout pile »)=1-1/8=7/8.

3. Tableau :

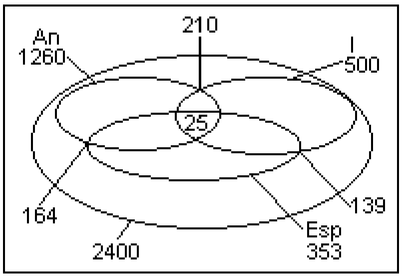
- ✓ Je lance deux dés cubiques non pipés, de faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6. J'effectue la somme des deux nombres sur les faces supérieures. Probabilités des événements :
A= « La somme est 5 » ; B= « La somme est strictement supérieure à 5 » ; C= « La somme est strictement supérieure à 17 ».

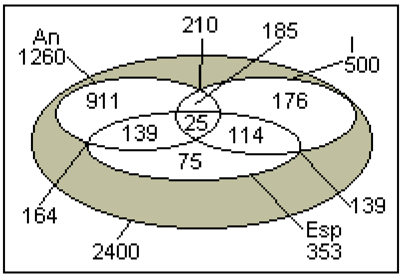
D1\D2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Une fois le tableau rempli, c'est super fastoche ! Nombre de cas possibles c'est 36.
p(A)=4/36=1/9.
p(B)=26/36=13/18.
p(C)=0 car la somme ne peut dépasser 12.

4. Patatoïde ou diagramme de Venn ou diagramme de Carroll :

- ✓ Dans un lycée de 2400 élèves, 1260 étudient l'anglais, 500 étudient l'italien, et 353 étudient l'espagnol. Nous savons que 210 élèves étudient à la fois l'anglais et l'italien, que 164 étudient à la fois l'anglais et l'espagnol, 139 font italien et espagnol, enfin, que 25 font en même temps les trois langues.
On choisit un élève au hasard. Probabilité qu'il n'étudie que l'espagnol ? probabilité qu'il n'étudie aucune de ces trois langues ?





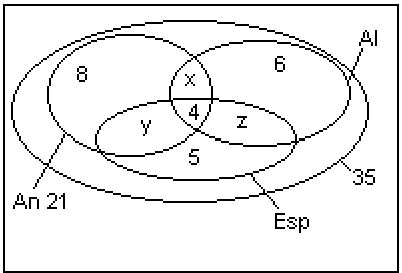
Créer le patatoïde. Reporter les données de l'énoncé comme ci-contre.

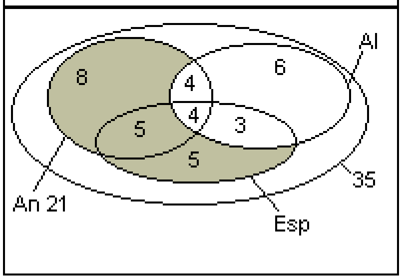
Il est alors possible de calculer toutes les parties concernant deux langues.
Anglais-italien vaut 210 DONT 25 font de l'allemand.
Il y a donc 210-25=185 qui font uniquement anglais italien.
Anglais-espagnol : 164-25=139. Italien-espagnol : 139-25=114.
Calcul du nombre d'élèves qui font uniquement que l'une des 3 langues.
Anglais : 1260-(139+25+185)=911. Italien : 500-(185+25+114)=176.
Espagnol : 353-(139+25+114)=75.
Remplir le diagramme au fur et à mesure que les résultats sont trouvés.

On peut alors calculer combien d'élèves n'étudient pas ces langues :
2400-(911+139+25+185+176+114+75)=775.

p(« que esp »)=75/2400.
p(« aucune des 3 »)=775/2400.

- ✓ Dans une classe de 35 élèves, tous étudient au moins l'une des langues suivantes : anglais, allemand, espagnol. 8 élèves n'étudient que l'anglais, 5 n'étudient que l'espagnol et 6 n'étudient que l'allemand. Ils sont 4 à étudier ces 3 langues. Autant d'élèves suivent les cours d'espagnol et d'allemand. 21 élèves vont en cours d'anglais. Un élève est tiré au sort. Probabilité pour qu'il n'apprenne que l'anglais et l'espagnol ?





Créer le patatoïde. Inclure les données de l'énoncé comme ci-contre.
Il reste des zones inconnues et trois indications de l'énoncé non utilisées :

- « Autant d'élèves suivent les cours d'espagnol et d'allemand »

$6+x+4+z=5+y+4=z$ d'où $y=x+1$.

- « 21 élèves vont en cours d'anglais »

$8+x+4+y=8+2x+1+4=21$ (avec $y=x+1$). D'où $x=4$, et $y=5$.

- « tous étudient au moins l'une des langues »

$8+x+4+y+6+z+5=35$ (avec $x=4$ et $y=5$) d'où $z=3$.

Ce qui permet d'obtenir le schéma définitif et la réponse à la question :
p=18/35.

Il reste à effectuer de **nombreux exercices** pour acquérir les bons réflexes.

I. Un sondage est réalisé dans une entreprise comprenant 60 % d'employés dont 10% savent parler anglais, et 40 % de cadres qui pour 20 % savent parler anglais. On interroge une personne prise au hasard. probabilité que ce soit:

1. Un cadre sachant parler anglais.
2. Une personne sachant parler anglais.
3. Je sais que la personne interrogée parle anglais. Probabilité que ce soit un cadre.

II. Un horticulteur a planté 10 000 bulbes. 7000 d'entre eux fleurirons dans 90% des cas en donnant une fleur rouge, le reste ne fleurira que 80 fois sur 100 pour donner une fleur jaune.

1. Quels sont les trois événements élémentaires qui peuvent se produire?
2. Soit l'événement A=' le bulbe ne donne rien'. Quel est son contraire?
3. Calculer la probabilité des événements: P(A), P('Le bulbe donne une fleur rouge'), P('Le bulbe donne une fleur verte').

III. Un dé pipé dont les six faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 est tel que p1=p3=p5, p2=3p1 et p2=p4=p6.

1. Déterminer la probabilité de sortie de chaque face.
2. On lance une fois le dé. Probabilité des événements A= « le numéro est pair », B= « le numéro est ≤ 5 »

IIII. Dans un lot de 10 outils, 2 sont défectueux. Je prends deux outils, l'un après l'autre, sans remise. Probabilité d'avoir exactement 1 outil défectueux?

V. D'un jeu de 32 cartes, je prends l'une après l'autre, sans les remettre dans le paquet, deux cartes. Probabilité pour que:

1. La première carte est un as, la deuxième un roi.
2. La première carte est rouge, la deuxième un coeur.
3. Il y a au moins un as sur les deux cartes.

VI. On propose un Q.C.M (questionnaire à choix multiples) comportant 8 questions, à 3 réponses possibles, dont une seule est correcte.

1. Combien de questionnaires peuvent être remplis de façon différente?
2. Combien de questionnaires ont 'tout faux'?

VII. Je lance deux dés bien équilibrés. Je fais la différence entre le plus grand et le plus petit résultat obtenu sur chacune des faces,

1. probabilité que la différence soit 1,
2. probabilité que la différence soit inférieure (strictement) à 2,
3. probabilité que la différence soit au moins de 1,
4. probabilité que la différence soit supérieure à 6.

VIII. (Bac) Une étude concernant la conduite en état d'ivresse et les accidents de la route, portant sur 100 000 cas a donné les résultats indiqués par le tableau ci-joint. On prend un conducteur au hasard.

	Conducteur sobre	***Conducteur ivre***
accidentés	99	20
non accidentés	98901	980

1) Probabilité que ce soit un conducteur ayant bu et accidenté.

2) Probabilité que ce soit un conducteur sobre et accidenté.

3) Remarquer que la probabilité de prendre au hasard un conducteur sobre et accidenté est supérieure à celle d'obtenir soit un conducteur ayant bu et accidenté. Peut-on déduire de ces calculs qu'il vaut mieux conduire en état d'ivresse ? (commenter !)

IX. (BAC) Un sac contient trois jetons verts, deux jetons jaunes et un jeton rouge. Un jeton vert, un jeton jaune et le jeton rouge portent le numéro 1, les autres le numéro 2.
On tire successivement et sans remise deux jetons du sac. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ? (On pourra s'aider d'un arbre ou d'un tableau.)
2. Quelle est la probabilité pour que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes ?
3. Quelle est la probabilité pour que les deux jetons tirés aient des numéros différents ?
4. Quelle est la probabilité pour que les deux jetons tirés différent à la fois par la couleur et par le numéro ?

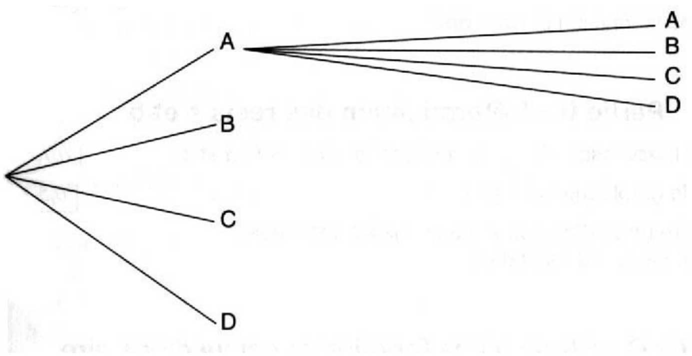
X. Un sac contient cinq boules indiscernables au toucher, portant respectivement les nombres 1, 2, 3, 4, 5.
On tire une boule du sac, lit le nombre inscrit sur cette boule, et on la remet dans le sac. On répète cette opération une deuxième fois.

1. Nombre de tirages possibles.
2. Probabilité que la somme des 2 nombres lus soit égale à 10.
3. Probabilité que la somme des 2 nombres lus soit égale à 1.
4. Probabilité que la somme des 2 nombres lus soit égale à 6.
5. Probabilité que la même boule soit tirée deux fois.

XI. (Bac) En ce dimanche midi de début d'année, A, B, C et D souhaitent tirer les rois. Pour cela, ils disposent de 2 galettes (une frangipane et une brioche) qui contiennent chacune une fève. Ils décident de couper les deux gâteaux en 4 parties égales et de manger tous une part de chaque galette. A, C sont des filles ; B, D sont des garçons.

1. On s'intéresse à la répartition des fèves.
   a. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :

Fève de la brioche (obtenue par)   **Fève de la frangipane (obtenue par)**



b. Combien y a-t-il de résultats possibles pour la répartition des 2 fèves ?

c. En supposant que les tirages sont équiprobables, déterminer la probabilité des événements :
E : « A a au moins une fève » ; F : « A n'a pas de fève» ; G : « aucun garçon n'a obtenu de fève » ; H : « les 2 fèves ont été obtenues par la même personne ».

2. Sachant que la fève de la brioche a été obtenue par une fille, déterminer la probabilité de l'événement :
I : « la fève de la frangipane est obtenue par B ».